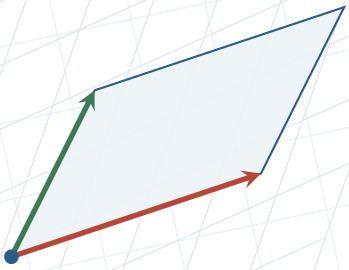
大学数学のアトリエ

University Mathematics Series

線形代数

Linear Algebra



算数・数学のアトリエ

sansu-sugaku-atelier.com

大学数学のアトリエ｜線形代数

オリエンテーション

このオリエンテーションで話すこと

- 線形代数って，そもそも何をする学問なのか．
- 全 7 章が，どんな順番でつながっているのか．
- このプリントの読み方と，つまずかずに進むコツ．

■ はじめに

ようこそ，線形代数の世界へ！

大学に入って最初に出会う数学が，微分積分と，この線形代数なんだ．微分積分は高校の延長っぽいけど，線形代数は「行列」「ベクトル空間」「固有値」と，聞いたことのない言葉が次々に出てくる．だから最初は「何のためにやってるのか分からない…」となりがちなんだよね．

でも安心してほしい．線形代数は，やっていることの**芯はとてもシンプル**なんだ．このオリエンテーションでは，その芯がどこにあるのかを先に見ておこう．地図を持って歩くと，道に迷いにくくなるからね．

■ 線形代数ってどんな学問？

ひとことで言うと，線形代数は**「まっすぐなもの」を扱う数学**なんだ．

中学校で習った比例 $y = ax$ を思い出してみよう．比例には，こんな 2 つの性質がある．

$$x \text{ を 2 倍すると } y \text{ も 2 倍}, \qquad x_1 + x_2 \text{ に対する } y \text{ は，それぞれの } y \text{ の和}.$$

「足し算」と「定数倍」がそのまま保たれる．この性質を**線形性**っていうんだ．グラフにすると原点を通るまっすぐな直線になる．これが「線形」という名前の由来だよ．

線形代数は，この比例の考え方を

- 変数が 1 つ → **たくさん**（x だけじゃなく $x_1, x_2, \ldots, x_n$）
- 数 → **ベクトル**（数をいくつか並べたもの）
- 比例定数 a → **行列**（数を長方形に並べたもの）

に広げたものなんだ．比例 $y = ax$ は，線形代数では $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ になる．見た目もそっくりでしょ？

コラム：世の中は「だいたい線形」

世の中のたいていの現象は，本当は曲がっている（非線形な）んだけど，**せまい範囲で見ればほぼまっすぐ**なんだ．地球は丸いけど，自分の家の周りは平らに見えるのと同じだね．だから「まっすぐなもの」をきっちり理解しておくと，いろんな現象を近似して扱えるようになる．微分も「曲線を，その点の近くで直線で近似する」ことだったよね．多変数の微分（偏微分・全微分）は，まさに線形代数の言葉で書かれるんだ．

■どこで使われてるの？　線形代数は，大学の数学のほぼすべての分野の**共通言語**なんだ．数学の外でも大活躍しているよ．

- **CG・ゲーム**：キャラクターを回転させたり拡大したりするのは，全部行列の掛け算．

- **画像・音声**：写真は数の巨大な表（行列）．圧縮やノイズ除去に線形代数が使われる．
- **AI・機械学習**：ニューラルネットワークの中身は，大量の行列の計算なんだ．
- **統計・データ分析**：回帰分析や主成分分析は，線形代数そのもの．
- **物理・工学**：振動，回路，量子力学…．微分方程式を解くときにも固有値が出てくる．

■ 全体の地図

このプリント集は全 7 章，32 回でできているよ．大きく分けると 3 つのステージになるんだ．

ステージ 1：計算の道具をそろえる　第 1 章〜第 3 章

行列の計算，連立方程式の解き方（掃き出し法），行列式．

高校数学の延長で，手を動かしてどんどん計算できるようになる段階だよ．

↓

ステージ 2：「ベクトル」の考え方を広げる　第 4 章・第 5 章

ベクトル空間，基底と次元，線形写像．

一番「大学数学っぽい」ところ．ここで抽象的な考え方に出会うんだ．

↓

ステージ 3：線形代数の核心へ　第 6 章・第 7 章

固有値と対角化，内積と直交性．

これまでの道具を全部使って，行列の「正体」を見抜く．応用もここに集中しているよ．

各章の中身はこんな感じ．

章	タイトル	主な内容
第 1 章	行列	行列の計算，逆行列，行基本変形，ランク
第 2 章	連立一次方程式	掃き出し法，解がいつ存在するか，解の構造
第 3 章	行列式	行列式の定義と性質，余因子展開，クラメルの公式
第 4 章	ベクトル空間	1 次独立，基底と次元，部分空間
第 5 章	線形写像	核と像，次元定理，表現行列，基底の変換
第 6 章	固有値・固有ベクトル	固有方程式，対角化とその応用，ジョルダン標準形
第 7 章	内積空間	正規直交基底，直交化，射影，対称行列の対角化，特異値分解

全部を通して流れている大きなテーマは，じつは 1 つなんだ．

行列（線形写像）を，いちばん分かりやすい形で見るにはどうすればいい？

たとえば，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を見ても，何をする行列なのかピンとこないよね．でも第 6 章まで進むと，これは「斜め 45° の方向に 3 倍に伸ばして，それと直角な方向はひっくり返す」変換なんだ，と一目で分かるようになる．この「見方を変えると，ぐっとシンプルになる」瞬間が，線形代数のいちばんおもしろいところなんだ！

■ プリントの読み方

どの回も，同じ形でできているよ．

- 最初の**「この回のゴール」**で，その回にできるようになることを確認しよう．
- 本文には，色のついた箱がいろいろ出てくる．色で役割が分かるようになっているんだ．

定義（青）

新しい言葉の意味をきっちり決めるところ．数学は「定義」がすべての出発点なんだ．

定理（赤）

定義から証明できる，大切な性質．すぐあとに【証明】がついているよ．

例・例題（緑）

定義や定理が「たとえばこういうこと」と分かる具体例．例題には【解答】がついている．

注意（灰）

間違えやすいところや，計算のコツ．

コラム（金）

ちょっと寄り道．他の分野とのつながりや，背景にある考え方を紹介しているよ．読み飛ばしても大丈夫．

- 最後に**練習問題**と**解答**がある．「(考えてみよう)」がついた問題は，少し発展的なチャレンジ問題だよ．
- タイトルに**（発展）**とある回（ジョルダン標準形，特異値分解）は，最初は飛ばしても OK．余裕ができたら戻ってこよう．
- 本文には「第 2 章 No.3 定理 5」のように，前の回への参照がたくさん出てくる．忘れていたら，ぜひ戻って読み直してみてね．ほかの分野につながるところは「分野「微分方程式」第 3 章 No.1」のように，分野名つきで書いてあるよ．

■ どう学ぶか：5 つのコツ

■1. **手を動かす**　線形代数は，**読むだけではまず身につかない**んだ．例題は，解答を見る前に自分でノートに計算してみよう．行列の計算は，やればやるほど速く正確になるよ．

■2. **迷ったら定義に戻る**　「1 次独立ってなんだっけ？」と思ったら，ためらわずに定義の箱を見直そう．大学数学では，**定義をちゃんと覚えているかどうか**で，理解のしやすさがまるで変わるんだ．定義は丸暗記じゃなくて，「どういう気持ちでこう決めたのか」まで考えられると最強だよ．

■3. **小さい具体例で確かめる**　n 次の一般的な話が出てきたら，2×2 行列や $\mathbb{R}^2$ で試してみよう．平面に絵を描いてみるのもおすすめ．たいていの定理は，2 次元で絵を描くと「そりゃそうだ」って思えるんだ．

■4. **分からなくても，いったん先へ進む**　特に第 4 章あたりで「抽象的すぎて分からない…」となることがある．それは全然おかしなことじゃないよ．少し先まで進んで具体的な使い方を見てから戻ってくると，「あ，そういうことか！」となることがよくあるんだ．線形代数は，**行ったり来たりしながら理解が深まる**学問なんだ．

■5. **証明は「なぜ」を知るために読む**　証明を読むのはしんどいけど，1 行ずつ「この等号は何を使った？」と確かめながら読んでみよう．証明が読めると，公式を忘れても自分で作り直せるようになるよ．いきなり全部分からなくても大丈夫．まずは「何を示そうとしているか」をつかむところからね．

計算ミスを防ぐ検算のワザ

線形代数の計算は長くなりがちだから，検算の方法を知っておくと心強いよ．

- 逆行列を求めたら，$AA^{-1} = E$ になるか確かめる．
- 連立方程式の解は，元の式に代入してみる．
- 対角化したら，P^{-1} を計算しなくても $AP = PD$ を確かめれば十分．
- 固有値の和はトレース（対角成分の和）に，積は行列式に等しくなる．

■ よく出てくる記号

最初は見慣れない記号も，使っているうちに自然に読めるようになるよ．困ったらここに戻ってきてね．

記号	意味	初登場
$\boldsymbol{a}$	ベクトル（太字で書く）	第 1 章
${}^tA$	A の転置（行と列を入れ替える）	第 1 章 No.1
E，O	単位行列，零行列	第 1 章
A^{-1}	A の逆行列	第 1 章 No.3
$\operatorname{rank} A$	A のランク（実質的な行の本数）	第 1 章 No.5
$\det A$，$\lvert A\rvert$	A の行列式	第 3 章 No.1
$\mathbb{R}^n$	実数を n 個並べたベクトル全体	第 4 章 No.1
$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$	$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ で生成される部分空間	第 4 章 No.2
$\dim V$	V の次元	第 4 章 No.3
$\operatorname{Ker} f$，$\operatorname{Im} f$	線形写像 f の核，像	第 5 章 No.2
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，$\lVert \boldsymbol{a} \rVert$	内積，ノルム（長さ）	第 7 章 No.1

■ さいごに

線形代数は，最初は「なんでこんなことするの？」の連続かもしれない．でも，第 6 章あたりで全部がつながったとき，きっと「線形代数っておもしろい！」って思えるはずなんだ．

一気に全部分かろうとしなくて大丈夫．1 回分ずつ，自分のペースで進めていこう．分からないところがあるのは，ちゃんと考えている証拠だよ．

それじゃあ，第 1 章 No.1「行列の定義と演算」から，いっしょに始めよう！